

简单双正交 C9/7 小波的提升构造

曹艳¹⁾ 王典洪¹⁾ 彭玉成²⁾

¹⁾(中国地质大学机电学院, 武汉 430074) ²⁾(华中科技大学能源学院, 武汉 430074)

摘要 针对 CDF9/7 等小波的缺陷, 灵活运用双正交对称滤波器的规一化和消失矩性质以及 9/7 小波的提升构造, 构造了一组包含两个自由变量的 9/7 提升小波族。该小波族通过选取合适的自由变量值, 得到了提升系数和滤波器系数都非常简洁, 而且构造了部分系数分母为 2 的幂次方的 C9/7 系列小波, 并结合滤波器理论, 讨论了它们的正交性和消失矩; 最后将 C9/7 小波与 CDF9/7 小波进行了对比分析, 结果表明, C9/7 小波在计算性能方面明显优于 CDF9/7 小波, 而在客观质量评价和主观质量评价方面则与 CDF9/7 小波不相上下。

关键词 双正交滤波器 9/7 小波 消失矩 提升方法

中图法分类号: TP919.81 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)07-1201-05

Construction of Simple Biorthogonal C9/7 Wavelet Based on Lifting Scheme

CAO Yan¹⁾, WANG Dian-hong¹⁾, PENG Yu-cheng²⁾

¹⁾(Faculty of Mechanical & Electronic Engineering, China University of Geosciences, Wuhan 430074)

²⁾(The Institute of Energy & Power, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract Using normalization, vanishing moment of biorthogonality symmetry filter and the 9/7 wavelet lift construct, a new method is proposed for constructing lifting wavelets family whose coefficients consisted of two free variables. The lift coefficient and the filter coefficient obtained using our method are very succinct of which the coefficients' denominators are the index of the two. Under the filter theory, the biorthogonality and vanishing moment is discussed. Furthermore, the characteristic of C9/7 is compared to the well-known original irrational coefficients 9/7 wavelet filters developed by Cohen, Daubechies and Feauveau. The software simulation result show that the new method is optimal because of the low complexity in the computation of image coding and keeping the quality of the image after compressed.

Keywords biorthogonal filter, 9/7 wavelet, vanish moment, lifting scheme

1 引言

为了适应多媒体技术的快速发展的需要, 1997年3月, JPEG2000 成为新一代静止图像的压缩标准, 它虽首选 CDF9/7 小波^[1]进行有损压缩变换, 但该小波的提升结构^[2]中的 5 个提升系数都为无理数, 不仅计算复杂, 而且不方便硬件的标准化与快速实现。

针对这个问题, 文献[3]中的 9/7-F 小波用分母为 2 的幂次方的有理分数来代替上述的 5 个提升系数, 不过由于分母很大, 因此计算量也较大; 文献[4]中的 D9/7 小波有一组比较简单的提升系数, 其相对 9/7-F 小波提升系数已经得到了较大的简化, 而且经本文作者验证, 用其压缩图像, 确实在客观质量评价与主观质量评价方面都与 CDF9/7 小波不相上下, 但由于其构造方法是进行大量的比较与实验, 没有规律可言, 因此带有较大的偶然性; 文献[5]通

基金项目: 湖北省自然科学基金资助项目(2004075014)

收稿日期: 2005-12-26; 改回日期: 2006-06-09

第一作者简介: 曹艳(1977 ~), 女, 硕士研究生。主要研究方向为图像处理、小波理论及应用等。E-mail: pingfanyan@163.com

过双正交小波构造定理和 9/7 小波的提升结构,得到了所谓的 LS9/7 小波,该小波不仅提升系数简单,而且也经本文作者验证,性能与 CDF9/7 小波相近,不过由于它的提升系数中的尺度因子 (scaling factor) 是无理数,所以滤波器系数也都为无理数。

正是基于以上论述,本文作者给出了 C9/7 系列的小波,试图克服上述小波的种种缺陷。结果表明,这种尝试是成功的。

2 双正交 9/7 小波的构造

大家知道, CDF9/7 小波是具有对称结构的双正交小波,其分解端与重构端的滤波器长度分别为 9 和 7。为了得到新的对称的双正交 9/7 小波,设分解端与重构端的滤波器函数分别为

$$\begin{cases} H(\omega) = h_0 + 2 \sum_{n=1}^4 h_n \cos n\omega \\ G(\omega) = g_0 + 2 \sum_{n=1}^3 g_n \cos n\omega \end{cases} \quad (1)$$

设 $H(\omega)$ 和 $G(\omega)$ 在 $\omega = \pi$ 处分别存在 p 阶和 \bar{p} 阶零点, $p \geq 1$ 和 $\bar{p} \geq 1$, 且都为整数, 即

$$\begin{cases} H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-j\omega}}{2}\right)^p L(\omega) \\ G(\omega) = 2 \left(\frac{1 + e^{-j\omega}}{2}\right)^{\bar{p}} \bar{L}(\omega) \end{cases} \quad (2)$$

上式中, $L(\omega)$ 和 $\bar{L}(\omega)$ 为双边几何多项式, 由归一化性质可得到 $H(0) = 1, G(0) = 2$, 即

$$\begin{cases} h_0 + 2 \sum_{n=1}^4 h_n = 1 \\ g_0 + 2 \sum_{n=1}^3 g_n = 2 \end{cases} \quad (3)$$

由式(2)可知, 对于 $\forall p \geq 1$ 和 $\bar{p} \geq 1$ 的整数都有 $H(\pi) = 0$ 和 $G(\pi) = 0$, 即

$$\begin{cases} h_0 + 2 \sum_{n=1}^4 (-1)^n h_n = 0 \\ g_0 + 2 \sum_{n=1}^3 (-1)^n g_n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

综合式(3)和式(4), 并整理得

$$\begin{cases} 4h_1 + 4h_3 = 1 \\ 2h_0 + 4h_2 + 4h_4 = 1 \\ g_0 + 2g_2 = 1 \\ 2g_1 + 2g_3 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

另一方面, 9/7 小波的一个多相分解为^[2]

$$P(z) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \quad (6)$$

$$\text{式中, } P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta(1+z) & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & \gamma(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta(1+z) & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa \text{ 称为提升系数。另外,}$$

$P(z)$ 又可以表示为^[2]

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, $h_e(z) = h_0 + h_2(z+z^{-1}) + h_4(z^2+z^{-2}), h_o(z) = h_1(z+1) + h_3(z^2+z^{-1}), g_e(z) = -g_1(1+z^{-1}) - g_3(z^3+z^{-2}), g_o(z) = g_0 + g_2(z+z^{-1})$ 。

联立式(5)、式(6)、式(7), 并令 $\frac{\kappa}{4} = U, \frac{1}{2\kappa} = V$

(显然, $8UV = 1$), 整理即得到

$$\begin{cases} 2V\delta + \beta = U \\ 1 + 4\gamma\delta + 4U\alpha = 2U \\ 4\beta\gamma + 1 = 2V \\ 2V\alpha + \gamma = -V \end{cases} \quad (8)$$

求解式(8)方程组, 即可获得提升系数。下面讨论式(8)的求解。

式(8)中包含了 4 个等式和 5 个未知变量, 即 5 个提升系数, 从数学上讲, 由此方程组可以求得含有一个自由变量的解, 但实际情况并非如此。可以证明式(8)中有一个等式是多余的, 因为可以由其中的任意 3 个等式推导出剩下的一个等式 (推导过程此处省略)。

由上述论述可见, 式(8)实际上由 3 个独立的方程组成, 从而可解得

(1) 若 $\alpha = -\frac{1}{2}$, 则相当于少了一个未知数, 因此可以 β 作为自由变量, 得

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa] = \left[-\frac{1}{2}, \beta, 0, \frac{1}{4} - \beta, 1\right] \quad (9)$$

(2) 若 $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, 则以 α 和 κ 作为自由变量, 得

$$\begin{cases} \alpha = \alpha \\ \beta = \frac{\kappa - 1}{2(1 + 2\alpha)} \\ \gamma = -\frac{1}{2\kappa}(1 + 2\alpha) \\ \delta = \frac{\kappa}{4} \left(\kappa - \frac{2(\kappa - 1)}{1 + 2\alpha}\right) \\ \kappa = \kappa \end{cases} \quad (10)$$

在式(9)和式(10)中,不同的自由变量对应着以下3种不同的提升系数:

① 对于解(1),若稍加推导,就可以得出:不论 β 和 δ 取何值,滤波器系数都保持不变;

② 对于解(2),若取 $\kappa = 1$,同样可以推导得出:不论 α 取何值,滤波器系数也都保持不变,而且提升系数与第①种情况中的提升系数相同;

③ 理论上讲,从第①和第②种情况中可以得到无穷多组提升系数,但滤波器只有一组。可以预见,在卷积模式下,若采用第①和第②种情况中的滤波器实现图像的小波变换,并使用相同的编码方法,则将可得到完全相同的图像压缩结果。但在提升方式下,压缩结果是否一致还需验证。取相差比较大的提升系数,比如,式(9)中取 $\beta = -100$ 和 $\beta = 100$,称此时的小波分别为 9/7-S1 和 9/7-S2;式(10)中取 $\alpha = 100$ 和 $\alpha = 0$,称此时的小波分别为 9/7-S3 和 C9/7-1(各小波中的系数见表1),再使用 JPEG2000 中的提升方案进行实验。实验中用到了文献[6]中的 Elaine 图像,该图像是 512×512 的 256 级灰度图。为了节省篇幅,表2中只列出了 9/7-S1 小波和 C9/7-1 小波的结果数据。由表2可以看出,两种小波编码图像的码率及峰值信噪比(peak signal noise ratio, PSNR)数据是非常一致的,没有列出来的数据也保持了高度的一致。可见 9/7-S1 小波、9/7-S2 小波、9/7-S3 小波和 C9/7-1 小波实质上为同一个小波。所以,提升系数可以尽量简洁,如 C9/7-1 小波。另外,从表1中还可以看出,C9/7-1 小波在实质上是 5/3 小波,它的滤波器系数中的非零项正好等于 JPEG2000 中的 5/3 小波^[7]。

表1 9/7-S1,9/7-S2,9/7-S3 和 C9/7-1 小波

Tab.1 Wavelet and filter coefficients

$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa]$	9/7-S1	$\left[-\frac{1}{2}, -100, 0, \frac{401}{4}, 1\right]$
	9/7-S2	$\left[-\frac{1}{2}, 100, 0, -\frac{399}{4}, 1\right]$
	9/7-S3	$\left[100, 0, -\frac{201}{2}, \frac{1}{4}, 1\right]$
	C9/7-1	$\left[0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right]$
$[h_0, h_{z1}, h_{z2}, h_{z3}, h_{z4}]$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, 0\right]$	
$[g_0, g_{z1}, g_{z2}, g_{z3}]$	$\left[1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right]$	

表2 Elaine 图像的测试数据
Tab.2 Test data of Elaine image

9/7-S1		C9/7-1	
码率(bpp)	PSNR(dB)	码率(bpp)	PSNR(dB)
3.8198	50.1903	3.8199	50.1900
1.9974	40.1833	1.9975	40.1832
1.0580	35.8376	1.0581	35.8376
0.4879	33.1547	0.4879	33.1547
0.2472	32.0449	0.2473	32.0450
0.1244	30.7436	0.1244	30.7436
0.0621	28.7880	0.0621	28.7880

④ 在式(10)中,若取 $\alpha = -1.5861343421$, $\kappa = 1.2301744106$,则可得到 CDF9/7 小波。若取 $\alpha = -3/2, \kappa = 5/4$,则称得到的小波为 C9/7-2 小波。若取 $\alpha = -3/2, \kappa = 3/2$,则称得到的小波为 C9/7-3 小波,其有关系数见表3和表4。

表3 C9/7-2 小波

Tab.3 C9/7-2 wavelet

$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa]$	$\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{16}, \frac{4}{5}, \frac{15}{32}, \frac{5}{4}\right]$
$[h_0, h_{z1}, h_{z2}, h_{z3}, h_{z4}]$	$\frac{1}{10} \left[\frac{190}{32}, \frac{43}{16}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{16}, \frac{9}{32}\right]$
$[g_0, g_{z1}, g_{z2}, g_{z3}]$	$\left[\frac{9}{8}, \frac{19}{32}, -\frac{1}{16}, -\frac{3}{32}\right]$

表4 C9/7-3 小波

Tab.4 C9/7-3 wavelet

$[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa]$	$\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$
$[h_0, h_{z1}, h_{z2}, h_{z3}, h_{z4}]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{11}{8}, \frac{7}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right]$
$[g_0, g_{z1}, g_{z2}, g_{z3}]$	$\left[\frac{5}{4}, \frac{11}{16}, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{16}\right]$

3 正交性和消失矩

为了验证 C9/7 小波的正交性,只需验证 C9/7 小波重构条件和约束条件^[8]。重构条件为

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 2 \quad (11)$$

约束条件为 $\exists k > 0$ 和 $\bar{k} > 0$,它使得

$$\begin{cases} B_k = \max_{\omega} \left| \prod_{i=1}^{k-1} L(2^{i-1}\omega) \right|^{1/k} < 2^{p-\frac{1}{2}} \\ B_{\bar{k}} = \max_{\omega} \left| \prod_{i=1}^{\bar{k}-1} \bar{L}(2^{i-1}\omega) \right|^{1/\bar{k}} < 2^{\bar{p}-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (12)$$

对于 C9/7-3 小波,结合表4和式(1)可得

$$\begin{cases} H(\omega) = \frac{11 + 14\cos\omega - 2\cos2\omega - 2\cos3\omega + 3\cos4\omega}{24} \\ G(\omega) = \frac{10 + 11\cos\omega - 2\cos2\omega - 3\cos3\omega}{8} \end{cases} \quad (13)$$

根据式(13),容易验证式(11)的完全重构条件。另外,可以验证 C9/7-3 小波在 $p = \bar{p} = 2$ 和 $k=2, \bar{k} = 1$ 时满足约束条件。事实上,由于由式(13)和式(2)可得

$$\begin{cases} L(\omega) = \frac{11 + 14\cos\omega - 2\cos2\omega - 2\cos3\omega + 3\cos4\omega}{12(1 + \cos\omega)} e^{j\omega} \\ \tilde{L}(\omega) = \frac{10 + 11\cos\omega - 2\cos2\omega - 3\cos3\omega}{8(1 + \cos\omega)} e^{j\omega} \end{cases} \quad (14)$$

从而得 $B_2 = \max_{\omega} |L(\omega)L(2\omega)|^{1/2}$, $B_{\tilde{1}} = \max_{\omega} |\tilde{L}(\omega)|$, 记 $b(\omega) = L(\omega)L(2\omega) e^{-3j\omega}$, $\tilde{b}(\omega) = \tilde{L}(\omega) \times e^{-j\omega}$, 所绘制出的 $b(\omega)$ 和 $\tilde{b}(\omega)$ 在 $\omega \in [0, 2\pi]$ 内的曲线如图 1 所示,由图 1 可见, $B_2^2 < 2^3$, $B_{\tilde{1}} < 2^{3/2}$, 约束条件得以验证。

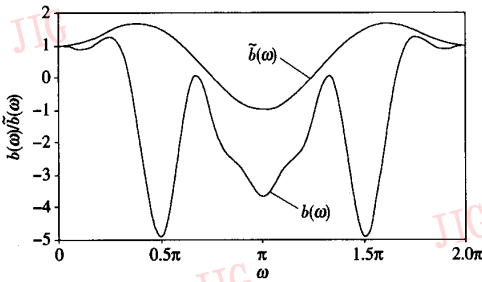


图 1 C9/7-3 小波约束性条件证明

Fig.1 Certification of C9/7-3 wavelet constraint condition

上述结论说明,C9/7-3 小波是在分解端和重构端的消失矩都为 2 的双正交小波。

采用同样的方法,还可以验证 C9/7-1 小波的消失矩在分解端为 2,在重构端为 2,且在 $k=2, \bar{k} = 1$ 时满足约束条件;C9/7-2 小波的消失矩在分解端为 2,在重构端为 4,且在 $k=1, \bar{k} = 1$ 时,满足约束条件。

4 性能比较

4.1 计算复杂性比较

CDF9/7 小波的 5 个提升系数全都为无理数,滤波器系数也都为无理数,其在计算中会涉及到浮点数的加法和乘法,而本文中的 C9/7 系列小波(即 C9/7-1、C9/7-2、C9/7-3),由于提升系数和滤波器系数都为有理分数,部分系数的分母为 2 的幂次方,所

以在计算中只涉及到整数的加法、乘法以及移位运算,这样就大幅度降低了计算的复杂性和硬件实现的难度,而且如下文所述,图像压缩性能也与 CDF9/7 小波相差不大,其中 C9/7-2 小波和 C9/7-3 小波的性能与 CDF9/7 小波非常接近。在计算复杂程度上,C9/7-1 小波最简单,其次是 C9/7-3 小波,再次是 C9/7-2 小波,最复杂的是 CDF9/7 小波。

4.2 图像压缩性能评价

本文中采用 JPEG2000 中的提升实现方案来测试 C9/7 系列小波的压缩性能,小波变换的层数为 5,图像取自文献[6],图像名称分别为 Elaine、Baboon、Lena,它们都是 512×512 的 256 级灰度图。表 5 是测试数据,其中 bpp 表示每像素占用的二进制位,是图像编码质量的客观评价标准。为了节省篇幅,表 5 中只列出了 Elaine 图像的测试数据,C9/7-1 小波的测试数据已经在表 2 中给出。图 2、图 3 和图 4 是根据测试数据绘制的曲线,从图中可以看出,C9/7-1 小波的图像压缩性能稍逊于 CDF9/7 小波,而 C9/7-2 和 C9/7-3 小波的图像压缩性能与 CDF9/7 小波非常接近。

表 5 不同小波下 Elaine 图像的测试数据

Tab.5 Test data of Elaine image

C9/7-2		C9/7-3		CDF9/7	
码率 (bpp)	PSNR (dB)	码率 (bpp)	PSNR (dB)	码率 (bpp)	PSNR (dB)
3.6264	49.8572	3.5995	49.5673	3.6067	49.7557
1.9958	41.0456	1.9984	40.8836	1.9989	41.0630
0.9981	36.0990	1.0226	35.9827	0.9955	36.0764
0.4951	33.5566	0.4942	33.4204	0.4926	33.5193
0.2473	32.3264	0.2473	32.2082	0.2500	32.3430
0.1248	31.0863	0.1249	30.8621	0.1233	31.0512
0.0625	29.1987	0.0624	28.9268	0.0607	29.1107

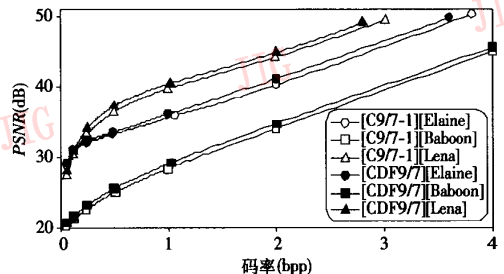


图 2 CDF9/7 和 C9/7-1 小波的比较

Fig.2 Comparison of CDF9/7 and C9/7-1

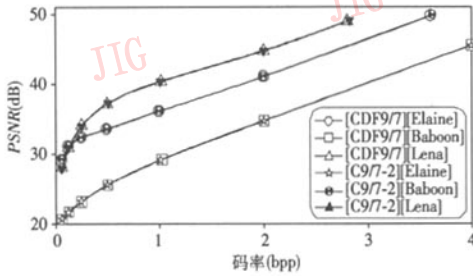


图 3 CDF9/7 和 C9/7-2 小波的比较
Fig.3 Comparison of CFD9/7 and C9/7-2

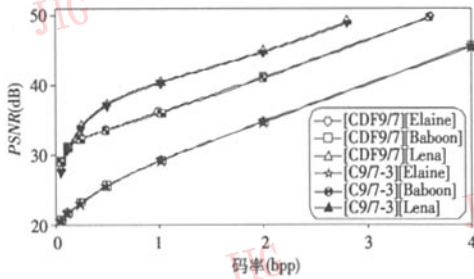


图 4 CDF9/7 和 C9/7-3 小波的比较
Fig.4 Comparison of CFD9/7 and C9/7-3

参考文献 (References)

- 1 Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets [J]. Communication. Pure Application. Maths, 1992, 45 (1): 485 ~ 560.
- 2 Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps [J]. Journal Fourier Annal Application, 1998, 4 (3): 245 ~ 267.
- 3 Admas M D, Kossentini F. Reversible integer-to-integer wavelet transforms for image compression; Performance evaluation and analysis [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9 (6): 1010 ~ 1024.
- 4 Ding Gui-guang, Guo Bao-long, Wang Yong. A kind of lifting 9-7-tap wavelet filter for hardware implementation [J]. Journal of Xidian University, 2003, 30 (5): 603 ~ 606. [丁贵广, 郭宝龙, 王勇. 一种适于硬件实现的提升 9/7 小波滤波器 [J]. 西安电子科技大学学报 (自然科学版), 2003, 30 (5): 603 ~ 606.]
- 5 Zhong Guang-jun, Cheng Li-zhi, Chen Huo-wang. A simple 9/7 wavelet filter based on lifting [J]. Computer Engineering & Science, 2003, 25 (1): 35 ~ 37. [钟广军, 成礼智, 陈火旺. 基于提升方法的简单 9/7 小波滤波器 [J]. 计算机工程与科学, 2003, 25 (1): 35 ~ 37.]
- 6 USC-SIPI Image Database [EB/OL]. <http://sipi.usc.edu/database/index.html>
- 7 Calderbank A R, Daubechies I, Sweldens W, et al. Lossless image compression using integer to integer wavelet transforms [A]. In: Proceedings of IEEE Institute Conference on Image Processing (ICIP' 97) [C], Santa Barbara, CA, USA, 1997: 51 ~ 60.
- 8 Li Bi-cheng, Luo Jian-shu. Wavelet Analysis and Applications [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003: 56 ~ 59. [李弼程, 罗建书. 小波分析及其应用 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003: 56 ~ 59.]

5 结 论

本文基于严格的逻辑推理构造了 C9/7 系列的小波,其提升系数和滤波器系数不仅都为有理分数,而且非常简洁,部分系数的分母为 2 的幂次方,在计算中可以只涉及到整数的加法、乘法和除法以及移位运算,因此计算量对比于 CDF9/7 小波得到了大幅度的简化。其中 C9/7-1 小波实质上是 5/3 小波,其系数最简洁,虽然在 C9/7 系列小波中计算性能最优,但压缩性能比 CDF9/7 小波稍微差一些; C9/7-2 小波与 CDF9/7 小波的图像压缩性能最接近,但计算性能比 C9/7-3 稍微差一点。